1.4.7 Negace složených výroků II

Předpoklady: 010405

Pedagogická poznámka: Na začátku hodiny slovně zadávám úkol najít negaci implikace. Teprve po zapsání do třídnice promítám zadání příkladů (kde je v podstatě uveden návod na splnění tohoto úkolu).

Negace implikace

Př. 1: Doplň následující tabulku pravdivostních hodnot výroků. Hledej negaci implikace.

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci implikace. Zápis $\neg(a \Rightarrow b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.
Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).
Sloupec negací má tři 0 a jednu 1 $\Rightarrow$ nemůže to být implikace (poměr 1 a 0 má obrácený) $\Rightarrow$ musí to být konjunkce dvou výroků (tento výrok má tři 0 a jednu 1) $\Rightarrow$ zkusíme konjunkci $(\ )\wedge(\ )$.
Hledáme, co dosadit do závorek:
Druhý řádek: konjunkce $(\ )\wedge(\ )$ je pravdivá $\Rightarrow$ musíme ji složit ze dvou pravdivých výroků (platí $1 \wedge 1 = 1$) $\Rightarrow$ výrok *a* je pravdivý, výrok *b* je nepravdivý $\Rightarrow$ místo *b* použijeme jeho negaci, výrok *a* necháme (abychom měli dvakrát 1).
Zřejmě platí, že negací výroku $a \Rightarrow b$ je výrok $a \wedge \neg b$.

Př. 2: Doplň předchozí tabulku o sloupec pro výrok $a \wedge \neg b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \Rightarrow b)$ ověř, že je negací výroku $a \Rightarrow b$.

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0

Negací výroku $a \Rightarrow b$ je výrok $a \wedge \neg b$.
Logické: Implikace je nepravdivá, pouze když z pravdy plyne nepravda. Při negaci musí nastat právě tato situace – výrok *a* je pravdivý a zároveň výrok *b* nepravdivý.

Pedagogická poznámka: Negování implikací je vynikajícím příkladem při nacvičování dodržování pravidel. Naprostá většina studentů totiž implikace intuitivně neguje špatně (buď špatně sestavuje výrok, nebo přidává předložku jestli).
Problémy vznikají ze dvou různých důvodů:
Část studentů vůbec není schopna dodržovat pravidla. Ačkoliv mají pravidlo na negování napsané před očima, přesto při tvorbě negace postupují zcela bez ohledu na pravidlo čistě intuitivně a se špatným výsledkem. U nich je nutné, aby byli donuceni postupovat opravdu podle pravidla. Pokud se to nenaučí ihned, budou bez používání pravidel postupovat i dále.
Druhá část studentů sice podle pravidel postupovat dokáže, ale odmítá si je pamatovat. U nich je nutné tlačit na to, aby poznali, že se bez pravidel v hlavě neobejdou.

Př. 3: Neguj výrok: „Jestliže pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$, trojúhelník je pravoúhlý.“

Dva výroky:
a: Pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$.
b: Trojúhelník je pravoúhlý.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$ a trojúhelník není pravoúhlý.

Př. 4: Neguj výroky. Urči jejich pravdivostní hodnotu.
a) „Je-li číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi.“
b) „Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak není ostroúhlý.“
c) „Není-li číslo složené, pak má nejvýše dva dělitele.“

a) „Je-li číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi.“ - pravdivý výrok
Dva výroky:
a: Číslo je dělitelné devíti.
b: Číslo je dělitelné třemi.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Číslo je dělitelné devíti a není dělitelné třemi.

b) „Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak není ostroúhlý.“ – pravdivý výrok
Dva výroky:
a: Trojúhelník je pravoúhlý.
b: Trojúhelník není ostroúhlý.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Trojúhelník je pravoúhlý a je ostroúhlý.

c) „Není-li číslo složené, pak má nejvýše dva dělitele.“ – pravdivý výrok
Dva výroky:
a: Číslo není složené.

b: Číslo má nejvýše dva dělitele.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Číslo není složené a má alespoň tři dělitele.

Př. 5: Neguj výroky.
a) „Jestliže se nebudeš učit, dostaneš pětku."
b) „Jestli bude ráno pršet, nepojedu na kole."
c) „Nebude-li pršet, nezmoknem."

a)
a: Nebudeš se učit.
b: Dostaneš pětku
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Nebudeš se učit a nedostaneš pětku.
b)
Dva výroky:
a: Ráno bude pršet.
b: Nepojedu na kole.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Ráno bude pršet a pojedu na kole.
c)
Dva výroky:
a: Nebude pršet.
b: Nezmoknem.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, znegujeme na $a \wedge \neg b$.
Nebude pršet a zmokneme.

Pedagogická poznámka: Negování ekvivalence by žáci měli objevit sami. Tabulku vyplní samostatně a rychle, ale mají problém s nalezením formule, zřejmě kvůli tomu, že negací ekvivalence je opět ekvivalence (u všech předchozích výroků byl negací jiný typ výroku).
Další zajímavé postřehy u O.2012 ještě ve Strakonicích (pak už jsem si jich tolik nevšiml).
Asi polovina studentů při odvozování negace ekvivalence nepoužívala tabulku s výroky a, b a $a \Leftrightarrow b$, ale opsala celou tabulku z hodiny 010403, kde je ekvivalence odvozována jako výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$. Jinými slovy polovina studentů si vůbec nevšimla, že jsme pomocí výroku $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ něco odvodili a tento výrok jsme dál používali jako jeden ze základních složených výroků, který má svou ze svého významu dobře zdůvodnitelnou tabulku pravdivostních hodnot. Prostě jenom opsali ze sešitu látku, která pro ně neměla žádný další význam.
Druhý zajímavý efekt se týkal výsledku negace ekvivalence. Výsledkem jsou dva z hlediska správnosti zcela ekvivalentní výroky $\neg a \Leftrightarrow b$ a $a \Leftrightarrow \neg b$. Kvůli tomu jsme při procvičování na příkladech měli vždy dvě výsledné negace. Po procvičení negace ekvivalence se studenti vrátili k počítání sbírky a poměrně rychle se u negací normálních neekvivalentních výroků objevil dotaz, jak je ta druhá verze. Teprve po chvíli mi došlo, že studenti předpokládají, že stejně jako u ekvivalencí i u všech ostatních negací musí existovat dvě řešení. To opět ukazuje na to, že při

výuce si nikdo z tazatelů neuvědomil, že jsme se zaobírali speciálním případem negace a naše výsledky tak nemohou být přenositelné na vytváření negací obecně.

Negace ekvivalence

Př. 6: Najdi pomocí tabulky pravdivostních hodnot tvar negace ekvivalence.

Sestavíme si stejnou tabulku jako u předchozích příkladů.

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).
Sloupek negací má dvě 1 a dvě 0 $\Rightarrow$ negace musí být opět ekvivalencí postavenou na výrocích *a* a *b*.
Ekvivalence je pravdivá, když oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu. Její negace je pravdivá, když se pravdivosti původních výroků budou lišit. Stačí jeden z nich znegovat, máme tedy dvě možnosti: $a \Leftrightarrow \neg b$ a $\neg a \Leftrightarrow b$.
Doplníme předchozí tabulku o sloupce pro výroky $a \Leftrightarrow \neg b$ a $\neg a \Leftrightarrow b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \Leftrightarrow b)$ ověříme, že jsou negací výroku $a \Leftrightarrow b$.

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg a \Leftrightarrow b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$a \Leftrightarrow \neg b$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0

Náš odhad je správný.

Negací výroku $a \Leftrightarrow b$ **jsou výroky** $a \Leftrightarrow \neg b$ **nebo** $\neg a \Leftrightarrow b$.
Logické: Ekvivalence je pravdivá, když je hodnota výroků stejná, negace ekvivalence je pravdivá, když je hodnota výroků různá.

Př. 7: Neguj výrok: „Číslo je větší než 0, právě když je kladné.“

Dva výroky:
a: Číslo je větší než 0.
b: Číslo je kladné.
Výrok má tvar $a \Leftrightarrow b$, znegujeme na $a \Leftrightarrow \neg b$ nebo $\neg a \Leftrightarrow b$.
$a \Leftrightarrow \neg b$: "Číslo je větší než 0, právě když není kladné."
$\neg a \Leftrightarrow b$: "Číslo je menší nebo rovno 0, právě když je kladné."

Př. 8: Neguj výroky.
a) „Přirozené číslo je dělitelné 3, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 3.“
b) "Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro délky jeho stran platí vzorec $a^2+b^2=c^2$."
c) "Číslo nazýváme složené, právě když má nejméně tři dělitele."

a)
Dva výroky:
a: Přirozené číslo je dělitelné 3.
b: Ciferný součet čísla je dělitelný 3.
Výrok má tvar $a \Leftrightarrow b$, znegujeme na $a \Leftrightarrow \neg b$ nebo $\neg a \Leftrightarrow b$.
$a \Leftrightarrow \neg b$: "Přirozené číslo je dělitelné 3, právě když jeho ciferný součet není dělitelný 3."
$\neg a \Leftrightarrow b$: "Přirozené číslo není dělitelné 3, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 3."
b)
Dva výroky:
a: Trojúhelník je pravoúhlý.
b: Pro délky stran trojúhelníku platí vzorec $a^2+b^2=c^2$.
Výrok má tvar $a \Leftrightarrow b$, znegujeme na $a \Leftrightarrow \neg b$ nebo $\neg a \Leftrightarrow b$.
$a \Leftrightarrow \neg b$: " Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro délky jeho stran neplatí vzorec $a^2+b^2=c^2$."
$\neg a \Leftrightarrow b$: " Trojúhelník není pravoúhlý, právě když pro délky jeho stran platí vzorec $a^2+b^2=c^2$."
c)
Dva výroky:
a: Číslo nazýváme složené.
b: Číslo má nejméně tři dělitele.
Výrok má tvar $a \Leftrightarrow b$, znegujeme na $a \Leftrightarrow \neg b$ nebo $\neg a \Leftrightarrow b$.
$a \Leftrightarrow \neg b$: "Číslo se nazývá složené, právě když má nejvýše dva dělitele."
$\neg a \Leftrightarrow b$: "Číslo se nenazývá složené, právě když má nejméně tři dělitele."

Pedagogická poznámka: Problémem v následujícím příkladu je bod b) a dál, protože v nich nejde o ekvivalence. Dopředu na to neupozorňuji.

Př. 9: Neguj výroky.
a) „Skočil z okna, právě když jsem se vracel domů.“
b) „Já to platit nebudu, radši se dám na vojnu.“
c) „Bude-li každý z nás z křemene, bude celý národ z kvádru.“
d) „Přišel jsem, viděl jsem, zvítězil jsem.“

Př. 10: Neguj výroky. Urči jejich pravdivostní hodnotu.
a) „Kvadratická rovnice má řešení právě, když je diskriminant kladný nebo roven nule.“
b) „Je-li bod *V* různý od bodů *A* a *B*, pro velikost konvexního úhlu *AVB* platí $|\sphericalangle AVB| = 90°$ nebo bod *V* neleží na kružnici s průměrem *AB*.“

Př. 11: Petáková:
strana 11/cvičení 10 c), d)
strana 11/cvičení 11 c), d)

Shrnutí: Negací implikace $a \Rightarrow b$ je konjunkce $a \wedge \neg b$.